

氏 名	黒 木 慎太郎
学 位 の 種 類	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	第 4820 号
学位授与年月日	平成 18 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当者
学 位 論 文 名	Classification of Transformation Groups (変換群の分類)
論文審査委員	主査 教授 枡 田 幹 也      副査 教授 河 内 明 夫 副査 教授 金 信 泰 造

### 論 文 内 容 の 要 旨

本博士論文は変換群の分類とそれに関連した二つの研究をまとめたものである。

変換群論の研究は 1872 年の Felix. Klein によるエルランゲンプログラムにおいて重要なものとして指摘されている。彼は「幾何学とは、与えられた変換群で不変な性質を研究する学問である」という見方を打ち出した。実際、ある空間  $X$  の幾何学的な構造を不変にする写像全体を考えれば、それは変換群となって空間  $X$  に作用していることとなる。つまり、変換群とは数学に自然に現れるものであり幾何構造を理解する上で研究する価値の大きいものであると言える。特に変換群の研究において分類問題は基本的かつ中心的な問題であろう。

Part 1 では変換群の分類問題そのものを研究した。具体的には、1960 年の H.C.Wang と 1978 年の F. Uchida による群作用の分類を動機として、コホモロジー複素二次超曲面上に余次元 1 の主軌道を持って作用するコンパクトリー群とその空間の完全な分類を行った。興味深い結果として、複素二次超曲面以外の多様体を一つ得ることができた。また、A. Kollross の 2002 年の論文では得られないような結果を得ることも出来た。

Part2 では GKM グラフと同変グラフコホモロジーを研究した。同変グラフコホモロジーとは、ある場合の群作用を区別するのに役立つ不変量である。2001 年の Guillemin-Zara と 2005 年の Maeda-Masuda-Panov の GKM グラフの研究はトポロジーと組み合わせ論の一つの橋渡しをする研究となった。Part2 では、hypertorus graph という GKM グラフを定義しその同変グラフコホモロジーをある場合において組み合わせ的に公式化する研究を行った。この研究が、変換群の分類に役立つのみならず、トポロジーと組み合わせ論の新たな橋渡しをするものと期待している。

### 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は、Part I と Part II からなり、変換群論の分類に関する 2 つの話題を考察している。Part I の目的は、余次元 1 の軌道をもつコンパクトリー群作用の分類である。コンパクトリー群作用の分類は、変換群論の基本的な問題であるが、ある適当な条件を課しないと手が届かない。余次元 0 の軌道をもつ場合は、等質空間の分類に他ならず、これに関しては十分な研究がある。次の場合として余次元 1 の軌道をもつ場合の分類が自然な問題として考えられるが、この場合も、作用される空間を限定しないと問題は頗る難しくなる。作用される空間が複素射影空間の場合は、内田伏一氏が分類を完成している。複素射影空間の次に位置すると思われる空間として、複素射影空間内の複素 2 次曲面があり、Part I では、この曲面と同じコホモロジー型をもった空間の場合に、余次元 1 軌道をもつ作用の分類を完成している。面白いことに、例外的な作用が 2 つ現れ、作用されている空間が複素 2 次曲面とは位相的に異なる場合がある。

Part II では、ハイパートーリック多様体とグラフとの関係に注目している。ハイパートーリック多様体の同

変コホモロジーは、対応するグラフから組合せ論的に記述できるという事実がある。Part の目的は、この幾何と組合せ論を結ぶ面白い事実をトポロジーの観点から拡張することである。ハイパートーリック多様体はトーリック多様体の四元数版と言えるものだが、四元数射影空間やトーリック多様体の余接束はハイパートーリック多様体とならない。トポロジーの立場からすると、これらも含んだあるクラスを考えるべきで、それらに対応するグラフもよい研究対象となるクラスと思われる。Part では、トポロジーの立場からは、どのようなグラフを考えるべきかを提唱し、あるクラスのグラフに対しては、その同変コホモロジーが組合せ論的に完全に記述できることを示している。

以上、本論文は、ある条件下ではあるが、変換群の分類という中心的な問題を解決し、また、ハイパートーリック多様体とグラフの対応をトポロジーの立場から拡張するという、興味深い内容を提示している。よって、博士（理学）を授与するに値すると判断した。